

ЛЕКЦІЯ №1. МАТЕМАТИЧНИЙ АПАРАТ СИНЕРГЕТИКИ

1.1. Вихідні рівняння. Фазові траєкторії

Макроскопічна система складається з величезної кількості взаємодіючих між собою частинок (електронів і ядер). Взаємодія між частинками відбувається через поля, і тому для визначення стану системи потрібно розв'язати систему рівнянь, що описують динаміку частинок і рівняння для полів (електромагнітних, гравітаційних та інших). Рух частинок описується законами квантової механіки (рівнянням Шредінгера або у випадку змішаного ансамблю — рівнянням для матриці густини). В окремих випадках при виконанні певних критеріїв рух частинок задовольняє законам класичної механіки — рівнянням Ньютона. Таким чином, для визначення стану системи потрібно знайти спільний розв'язок рівняння для матриці густини (або рівняння Ньютона) і рівняння для полів. Для макроскопічної системи, що складається з 10^{23} частинок, виконати таку задачу неможливо. Крім того, у більшості випадків розв'язок такої задачі навіть непотрібний, оскільки при експериментальному визначенні величин, що характеризують систему, проводиться усереднення з величезною кількістю частинок. Тому для характеристики стану системи вводять макроскопічні параметри, значення яких формується різноманітними процесами, що відбуваються на мікроскопічному рівні. Основні рівняння для макроскопічних змінних одержують різними шляхами — або з мікроскопічних рівнянь після усереднення по мікроскопічних змінних і нехтування неістотними для даного явища процесами, або з феноменологічних міркувань, постулюючи співвідношення між величинами, або одержуючи їх із загальних законів збереження і вводячи параметри, значення яких отримуємо з досліду. Прикладами таких макроскопічних рівнянь є рівняння гідродинаміки, теплопровідності, дифузії, кінетичні рівняння для хімічних компонент у хімічних реакціях та інші. Прикладами макроскопічних змінних є температура, тиск, концентрація частинок певного сорту тощо. У загальному випадку ці рівняння є нелінійними і описують процеси нестійкості та явища самоорганізації в нерівноважних системах. Проте опис системи, що складається з величезної кількості частинок, обмеженим числом

змінних є наближеним. Вийти за рамки цього наближення можна, враховуючи флуктуації. Спочатку ми будемо досліджувати поведінку відкритих нелінійних систем, що описуються макроскопічними змінними, не враховуючи флуктуації (в так званому детерміністичному підході), а потім (в останньому розділі) вивчимо роль стохастичності в нелінійних процесах. Макроскопічні параметри, що визначають стан системи, будемо називати динамічними змінними.

Отже, стан системи описується набором N динамічних змінних, які визначаються з основних законів досліджуваної області явищ. У подальшому будемо досліджувати системи, в яких динамічні змінні змінюються неперервно, а закони, з яких вони визначаються, формулюються у вигляді диференціальних рівнянь. Спочатку обмежимося дослідженням процесів, однорідних у просторі, і будемо вивчати залежність динамічних змінних від часу. Позначимо i -ту динамічну змінну в момент часу t через $X_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, N$). Величина $X_i(t)$ задовольняє системі диференціальних рівнянь

$$\frac{dX_i}{dt} = f_i(X_1, X_2, \dots, X_N, \lambda, t), \quad (1.1)$$

$$i = 1, 2, \dots, N.$$

У цьому співвідношенні $f_i(X_1, X_2, \dots, X_N, \lambda, t)$ у загальному випадку — деяка нелінійна функція аргументів (вигляд функції визначається законами досліджуваної області). Величина, λ визначає сукупність параметрів, що описують внутрішні і зовнішні умови.

Використання рівнянь першого порядку не є обмеженням, оскільки система рівнянь будь-якого порядку із запровадженням нових змінних може бути приведена до системи рівнянь першого порядку. Кожне з рівнянь системи (1.1) може розглядатись як проекція векторного рівняння

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{X}, \lambda, t) \quad (1.2)$$

де \mathbf{X} — вектор з проекціями X_1, X_2, \dots, X_N ; \mathbf{f} — вектор з проекціями f_1, f_2, \dots, f_N .

Сукупність значень $X_i(t)$ при $i = 1, 2, \dots, N$ у заданий момент часу можна розглядати як точку в фазовому просторі розмірності N змінних X_i . Залежність $\mathbf{X}(t)$ визначає траєкторію в фазовому просторі.

Для системи рівнянь (1.1) має місце теорема єдиності розв'язку. За теоремою Коші, якщо $f(\mathbf{X}, \lambda, t)$ — однозначні функції, які є неперервними разом зі своїми першими похідними при всіх значеннях t і $X_i(t)$, близьких до t_0 і X_i^0 , то існує єдиний розв'язок системи (1.1) $X_i(t)$, що задовольняє початковим умовам

$$X_i(t_0) = X_i^0, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (1.3)$$

Єдиність розв'язку означає, що через кожну точку проходить одна і тільки одна траєкторія.

Якщо функція f_i не залежить явно від часу, то система рівнянь називається автономною. Для автономної системи

$$\frac{dX_i}{dt} = f_i(\mathbf{X}, \lambda). \quad (1.4)$$

Серед розв'язків системи (1.4) важливе місце мають розв'язки, що описують стаціонарні стани, коли динамічні змінні не залежать від часу. Для стаціонарних станів

$$\frac{dX_i}{dt} = f_i(\mathbf{X}, \lambda) \quad (1.5)$$

Розв'язком системи (1.5) є точки у фазовому просторі. Ці точки називаються особливими або стаціонарними. У загальному випадку можливе існування декількох особливих точок. Особливі точки характеризуються певними властивостями, які пов'язані з поведінкою розв'язку системи рівнянь поблизу цих точок. Для систем з двома динамічними змінними ми приведемо далі класифікацію особливих точок докладніше.

Для аналізу фазової траєкторії виключимо час у системі рівнянь (1.4), використавши для цього одне з рівнянь, наприклад рівняння для X_1 . Розділивши

ліві й праві частини системи рівнянь (1.4) при $i \neq 1$ на рівняння при $i=1$, матимемо

$$\frac{dX_i}{dX_1} = \frac{f_i(\mathbf{X}, \lambda)}{f_1(\mathbf{X}, \lambda)} = \Phi_{i1}. \quad (1.6)$$

Розв'язок системи рівнянь (1.6) дає фазову траєкторію. Для звичайних точок функція Φ_{i1} задовольняє умовам теореми Коші (якщо ним задовольняють функції f_i) і має місце теорема єдиності. Отже, через кожну звичайну точку проходить одна фазова траєкторія. Для особливих точок, в яких $f_i(\mathbf{X}, \lambda) = 0$, умова теореми Коші порушується. Виконання умов теореми Коші є достатнім, але не необхідним для єдиності розв'язку. Тому, якщо ці умови порушуються, стверджувати, що через точку проходить одна крива, не можна. Залежно від функції f_i через особливу точку може не проходити ні одна крива або більш ніж одна.

1.2. Стійкість

Важливою характеристикою розв'язків рівнянь є їх стійкість. Це зумовлено тим, що внаслідок дії різноманітних процесів, не врахованих у рівняннях (1.1), які часто мають випадковий характер, система може бути переведена з однієї фазової траєкторії в іншу. Виникає питання, чи буде подальший рух системи близьким до первинного, чи фазова траєкторія буде віддалятися від початкової?

Розглянемо деяку траєкторію $X_i(t)$, яка є розв'язком системи (1.1). За теоремою Ляпунова розв'язок називається стійким, якщо для довільного моменту часу t для будь-якого значення $\varepsilon > 0$ можна знайти таке значення $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$, що для будь-якого розв'язку $\tilde{X}_i(t)$, який задовольняє умові

$$|\tilde{X}_i(t_0) - X_i(t_0)| < \delta, \quad (1.7)$$

має місце

$$|\tilde{X}_i(t) - X_i(t)| < \varepsilon. \quad (1.8)$$

Розв'язок, який задовольняє умові

$$|\tilde{X}_i(t) - X_i(t)| \rightarrow 0 \quad (1.9)$$

при $t \rightarrow \infty$ називається асимптотично стійким.

Умови (1.7), (1.8) означають, що для стійкого руху фазові траєкторії не розбігаються. Умова (1.9) означає, що всі траєкторії асимптотичне наближаються до однієї стійкої траєкторії.

Визначимо умови стійкості деякого стаціонарного розв'язку автономної системи (1.4) $\mathbf{X} = \mathbf{X}^{(s)}$. Розглянемо траєкторії, що проходять поблизу точки $\mathbf{X}^{(s)}$, і введемо координати, які характеризують відхилення точки траєкторії від стаціонарної точки

$$x_i = X_i(t) - X_i^{(s)}. \quad (1.10)$$

Сукупність змінних x_i так само однозначно характеризує систему, як і сукупність величин X_i .

Розкладемо \mathbf{f} у ряд за степенями x_i .

$$\begin{aligned} f_i(\mathbf{X}, \lambda, t) = f_i(\mathbf{X}^{(s)}, \lambda) + \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial f_i}{\partial X_j} \right)_{\mathbf{X}^{(s)}} x_j + \\ + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^N \left(\frac{\partial^2 f_i}{\partial X_j \partial X_k} \right)_{\mathbf{X}^{(s)}} x_j x_k + \dots \end{aligned} \quad (1.11)$$

Використавши (1.11), а також враховуючи, що $f_i(\mathbf{X}^{(s)}, \lambda) = 0$, систему рівнянь (1.4) перепишемо у вигляді:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^N A_{ij} x_j + f_{2i}(\mathbf{x}, \lambda), \quad (1.12)$$

де

$$A_{ij} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial X_j} \right)_{\mathbf{X}^{(s)}}, \quad (1.13)$$

$$f_{2i}(\mathbf{x}, \lambda) = f_i(\mathbf{X}^{(s)} + \mathbf{x}, \lambda) - \sum_{j=1}^N A_{ij} x_j. \quad (1.14)$$

Функція $f_{2i}(\mathbf{x}, \lambda)$ має всі члени розкладу функції f_i в ряд за степенями x_i по порядку величин, вищих за перший.

Для дослідження стійкості стаціонарного стану досить обмежитися першим членом у рівнянні (1.12) і розв'язати систему рівнянь

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^N A_{ij} x_j \quad (1.15)$$

Система (1.15) є системою лінійних диференціальних рівнянь першого порядку з постійними коефіцієнтами. Згідно із стандартним методом розв'язування таких систем

$$x_i = u_i e^{pt}. \quad (1.16)$$

Підстановка (1.16) у (1.15) приводить до системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\sum_j A_{ij} u_j - p u_i = 0 \quad (1.17)$$

Система (1.17) має нетривіальний розв'язок, якщо детермінант дорівнює нулю:

$$\det |A_{ij} - p \delta_{ij}| = 0 \quad (1.18)$$

де δ_{ij} — символ Кронекера:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (1.19)$$

Умова (1.18) є характеристичним рівнянням для визначення декрементів наростання p . У загальному випадку число значень p збігається з числом динамічних змінних N . Будемо позначати різні розв'язки для p через p_ν , де $\nu = 1, 2, \dots, N$, а відповідні їм значення функції u_i — через $u_{i\nu}$. Значення величини p_ν зумовлює поведінку системи при відхиленні точки фазової траєкторії від стаціонарної точки: чи буде фазова траєкторія віддалятися від особливої точки, наближатись до неї, чи залишиться в околі особливої точки, тобто p_ν визначає стійкість розв'язку.

Мають місце такі теореми Ляпунова.

1. Якщо всі корені рівняння (1.18) мають від'ємні дійсні частини ($\operatorname{Re} p_\nu < 0$ для всіх ν), то розв'язок $\mathbf{X}^{(s)}$ є асимптотично стійким.

2. Якщо принаймні один корінь рівняння (1.18) має додатну дійсну частину, то стаціонарний розв'язок $\mathbf{X}^{(s)}$ є нестійким.

3. Якщо коренів з додатною дійсною частиною немає, проте є чисто уявні корені, то для отримання інформації про стійкість потрібно врахувати більш високі (ніж лінійні) наближення в розкладі f_i по x_i .

1.3. Нормальна форма рівнянь

Для окремого ν -го розв'язку (окремої моди) співвідношення (1.17) має вигляд

$$A_{ij}u_{j\nu} = p_\nu u_{i\nu} \quad (1.20)$$

У цьому співвідношенні і надалі в інших ми вважатимемо, що якщо в певному члені індекси повторюються, то за ними здійснюється підсумовування, тобто

$$\sum_{j=1}^N A_{ij}u_{j\nu} \equiv A_{ij}u_{j\nu}. \quad (1.21)$$

Введемо рівняння, спряжене до рівняння (1.20),

$$A_{ij}^+ \nu_{j\nu}^* = \tilde{p}_\nu \nu_{i\nu}^*, \quad (1.22)$$

де \mathbf{A}^+ – матриця, комплексно спряжена і транспонована до матриці \mathbf{A} , її елементи задовольняють умові

$$A_{ij}^+ = A_{ji}^*. \quad (1.23)$$

Оскільки ми матимемо справу з дійсними величинами f_i і, отже, дійсними величинами A_{ij} , то

$$A_{ij}^+ = A_{ji}. \quad (1.24)$$

Власні значення \tilde{p}_ν визначаються з умови

$$\det |A_{ji} - \tilde{p}_\nu \delta_{ij}| = 0. \quad (1.25)$$

Умови (1.18) і (1.25) еквівалентні. Тому власні значення матриць \mathbf{A} і \mathbf{A}^+ збігаються

$$\tilde{p}_\nu = p_\nu. \quad (1.26)$$

Розв'язки прямої та спряженої задачі є ортогональними. Щоб довести це, запишемо рівняння (1.22) для власного значення μ , помножимо його на $u_{i\nu}$,

помножимо рівняння (1.20) на $v_{i\mu}^*$ і віднімемо одне співвідношення від іншого.

Отже, матимемо

$$v_{i\mu}^* A_{ij} u_{j\nu} - u_{j\nu} A_{ij}^+ v_{i\mu}^* = (p_\nu - p_\mu) v_{i\mu}^* u_{i\nu}.$$

Враховуючи умову (1.24), отримаємо рівняння, де ліва частина дорівнює нулю. Отже,

$$(p_\nu - p_\mu) v_{i\mu}^* u_{i\nu} = 0. \quad (1.27)$$

Звідси випливає, що для розв'язків з різними власними значеннями ($p_\nu \neq p_\mu$) дійсна умова

$$v_{i\mu}^* u_{i\nu} = 0, \quad \mu \neq \nu. \quad (1.28)$$

Для випадку $\mu = \nu$ це співвідношення не дійсне. Нормуємо окремі розв'язки так, щоб виконувалась умова

$$v_{i\mu}^* u_{i\nu} = \delta_{\mu\nu}. \quad (1.29)$$

Співвідношення (1.29) і є умовою ортогональності розв'язків лінійізованих рівнянь.

Повернемося до системи нелінійних рівнянь (1.4) або до еквівалентної їй системи (1.12). Представимо залежність від часу динамічних змінних у вигляді розкладів за розв'язками лінійізованої системи рівнянь (1.15)

$$x_i = \sum_\nu q_\nu(t) u_{i\nu}. \quad (1.30)$$

При визначенні стану системи набір динамічних змінних $x_i(t)$ можна замінити набором змінних $q_\nu(t)$, які називаються нормальними координатами.

Підставляючи (1.30) у систему (1.12), після множення останньої на розв'язок спряженого рівняння $v_{i\mu}^*$, підсумовування по i з урахуванням умови ортогональності розв'язків (1.29), матимемо

$$\frac{dq_\mu}{dt} = p_\mu q_\mu + \Phi_\mu(q, \lambda), \quad (1.31)$$

де

$$\Phi_\mu(q, \lambda) = v_{i\mu} f_{2i} \left(\sum_\alpha q_\alpha u_\alpha, \lambda \right) \quad (1.32)$$

— нелінійна функція змінних q_μ , розклад якої в ряд за степенями q починається з квадратичних членів.

Система рівнянь (1.31) є еквівалентною вихідній системі (1.4). Вона називається системою рівнянь у нормальній формі.

1.4. Система з одним ступенем вільності

Для систем з одним ступенем вільності вихідну систему рівнянь перепишемо в одне рівняння першого порядку:

$$\frac{dX}{dt} = f(X, \lambda). \quad (1.33)$$

Фазовим простором тут є пряма лінія. Особливі точки визначаються так:

$$f(X^{(s)}, \lambda) = 0. \quad (1.34)$$

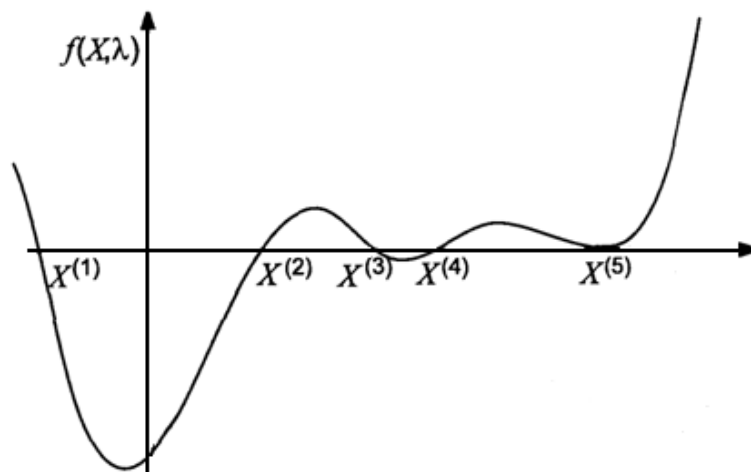


Рис. 1.1. Особливі точки для системи з однією змінною

Приклад нелінійної функції і положення особливих точок для системи з однією динамічною змінною наведено на рис. 1.1.

Характеристичне рівняння (1.18) для системи з однією змінною переходить у співвідношення

$$\left. \frac{\partial f}{\partial X} \right|_{X=X^{(s)}} = p, \quad (1.35)$$

тобто декремент наростання визначається значенням похідної функції f в особливій точці.

Згідно з теоремою Ляпунова для даного випадку розв'язок є стійким, якщо $f' < 0$ (точки $X^{(1)}$ і $X^{(3)}$ на рис. 1.1), і нестійким, якщо $f' > 0$ (точки $X^{(2)}$ і $X^{(4)}$ на рис. 1.1). В точці $X^{(5)}$ $f' = 0$, у цьому разі питання про стійкість потребує окремого дослідження (врахування більш високих, ніж лінійні, доданків у розкладі f за степенями $X - X^{(s)}$).

Проаналізуємо залежність розв'язку від зовнішнього параметра λ . Якщо зі зміною параметра λ функція $f'(X^{(s)}, \lambda)$ змінює знак, то змінюється також характер стійкості розв'язку поблизу особливої точки: стійка точка може стати нестійкою, і навпаки. Розглянемо на площині (X, λ) криву $f(X, \lambda) = 0$, яка описує положення особливої точки від параметра λ . Нехай ця крива має вигляд, наведений на рис. 1.2.

Переріз кривої $f(X, \lambda) = 0$ прямою $\lambda = \text{const}$ визначає число і положення особливих точок при заданому значенні параметра λ . Характер стійкості визначається значенням похідної $f'(X^{(s)}, \lambda)$. З рис. 1.2 випливає, що в області 1 $f' < 0$, в області 2 $f' > 0$. Тому можна визначити знак приросту функції зі зміною X (тобто похідної) в області $f(X, \lambda) = 0$, а також характер стійкості. В області жирної лінії на рис. 1.2 особливі точки стійкі, в області тонкої — нестійкі. З рис. 1.2 видно, що в областях $\lambda < \lambda_1$ і $\lambda > \lambda_3$ існує одна особлива точка, в області $\lambda_1 < \lambda < \lambda_3$ система має три особливі точки: дві стійкі і одна нестійка. Для прикладу ці точки на рис. 1.2 показані для значення $\lambda = \lambda_2$.

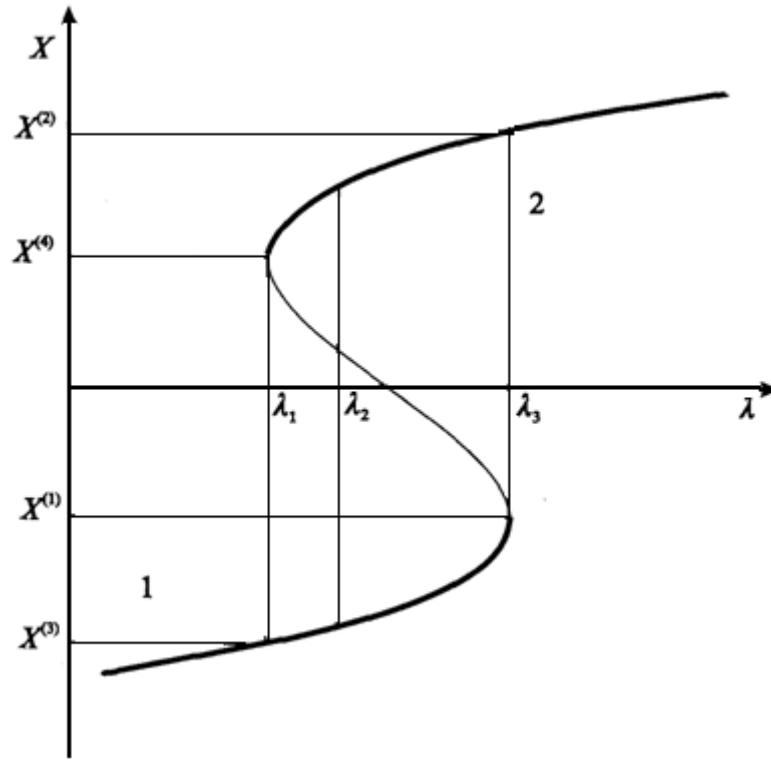


Рис. 1.2. Залежність положення особливої точки від зовнішнього параметра

Зі зміною параметра λ в точках $\lambda = \lambda_1$ і $\lambda = \lambda_3$ відбувається різка зміна стану системи. Так, зі збільшенням параметра λ від значень $\lambda < \lambda_1$ стаціонарна точка рухається вздовж нижньої кривої. При досягненні точки $\lambda = \lambda_3$ система стає нестійкою і з подальшим збільшенням λ стаціонарна точка, що характеризує стан системи, стрибкоподібно переходить на верхню криву. Отже, з плавною зміною λ раптово змінюється положення стійкої стаціонарної точки (від $X^{(1)}$ до $X^{(2)}$). Аналогічно зі зменшенням λ при $\lambda > \lambda_3$ точка рухається вздовж верхньої кривої (рис. 1.2) і при $\lambda = \lambda_1$ відбувається різка зміна стану системи від значення $X^{(4)}$ до $X^{(3)}$. Значення параметра $\lambda = \lambda_c$, за яким різко змінюється число і характер особливих точок, називається біфуркаційним. Для прикладу, наведеному на рис. 1.2, біфуркаційними є значення параметрів $\lambda = \lambda_1$ і $\lambda = \lambda_3$.

1.5. Система з двома ступенями вільності

Численні задачі природознавства зводяться до вивчення зв'язків системи двох рівнянь з двома невідомими. Тому розв'язки такої системи детально досліджені. Вихідна система рівнянь має вигляд:

$$\frac{dX_1}{dt} = f_1(X_1, X_2, \lambda), \quad \frac{dX_2}{dt} = f_2(X_1, X_2, \lambda). \quad (1.36)$$

Особливі точки визначаються з умов:

$$f_1(X^{(s)}_1, X^{(s)}_2, \lambda) = 0, \quad f_2(X^{(s)}_1, X^{(s)}_2, \lambda) = 0. \quad (1.37)$$

Фазова траєкторія визначається з розв'язку рівняння

$$\frac{dX_2}{dX_1} = \frac{f_2(X_1, X_2, \lambda)}{f_1(X_1, X_2, \lambda)}.$$

Для якісного аналізу фазової траєкторії корисним є метод ізоклін. Ізокліни — це лінії, що перетинають фазові траєкторії під однаковим кутом. Вони задовольняють рівнянню $\frac{dX_2}{dX_1} = \text{const}$. Головні ізокліни отримуємо, розв'язавши рівняння:

$$\frac{dX_2}{dX_1} = 0 \text{ або } f_2(X_1, X_2, \lambda) = 0, \quad (1.38)$$

$$\frac{dX_2}{dX_1} = \infty \text{ або } f_1(X_1, X_2, \lambda) = 0. \quad (1.39)$$

На перетині головних ізоклін згідно з (1.37) знаходяться особливі точки.

Характеристичне рівняння (1.18) для випадку системи двох рівнянь набуває вигляду:

$$\begin{vmatrix} A_{11} - p & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} - p \end{vmatrix} = 0, \quad (1.40)$$

де

$$A_{11} = \frac{\partial f_1}{\partial X_1}, \quad A_{12} = \frac{\partial f_1}{\partial X_2}, \quad A_{21} = \frac{\partial f_2}{\partial X_1}, \quad A_{22} = \frac{\partial f_2}{\partial X_2}.$$

Розв'язок рівняння (1.40) становить:

$$p_{1,2} = \frac{1}{2} \left(T \pm \sqrt{T^2 - 4D} \right), \quad (1.41)$$

де

$$T = A_{11} + A_{22}, \quad D = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}. \quad (1.42)$$

Згідно з (1.4), (1.16), (1.30) залежність динамічних змінних від часу близу особливої точки $X^{(s)}$ описується співвідношеннями:

$$X_1 = X_1^{(s)} + u_{11} \exp(p_1 t) + u_{12} \exp(p_2 t), \quad (1.43)$$

$$X_2 = X_2^{(s)} + u_{21} \exp(p_1 t) + u_{22} \exp(p_2 t). \quad (1.44)$$

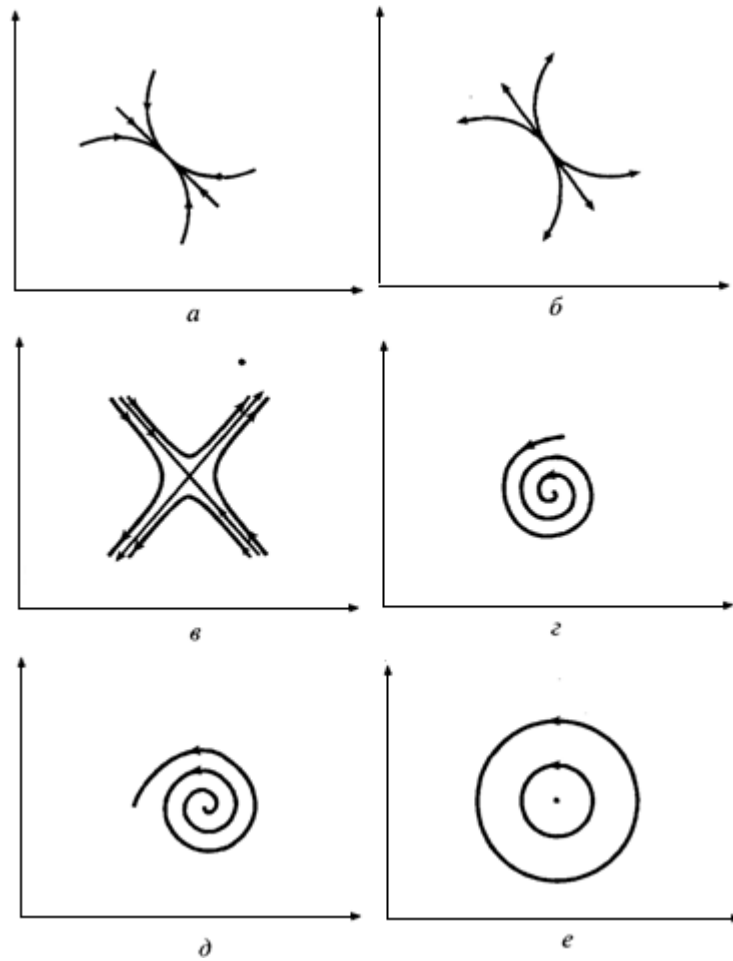


Рис. 1.3. Фазові траєкторії поблизу різного типу особливих точок

Значення p_1 і p_2 визначають поведінку розв'язку в околі особливих точок і класифікацію особливих точок.

1. Нехай обидва корені p_1 і p_2 дійсні ($T^2 - 4D \geq 0$).

1а. Якщо $D > 0$, то p_1 і p_2 мають однаковий знак. У цьому разі точка фазової траєкторії з часом наближається або віддаляється від особливої точки. Якщо p_1 і p_2 є дійсними від'ємними числами, останні два доданки в (1.43) прямують до нуля при $t \rightarrow \infty$ і всі фазові траєкторії в околі стаціонарної точки наближаються до неї. Така особлива точка називається вузлом. Поведінка фазових траєкторій поблизу стійкого вузла зображена на рис. 1.3,а. Якщо p_1 і p_2 дійсні додатні числа, фазові траєкторії віддаляються від особливої точки, яка в цьому разі називається нестійким вузлом (рис 1.3, б).

16. Якщо $D < 0$, то корені характеристичного рівняння мають протилежні знаки. При різних знаках p_1 і p_2 особлива точка називається сідлом (рис 1.3, в). Сідлова точка є нестійкою точкою.

2. Нехай корені характеристичного рівняння є комплексно-спряженими ($T^2 - 4D < 0$).

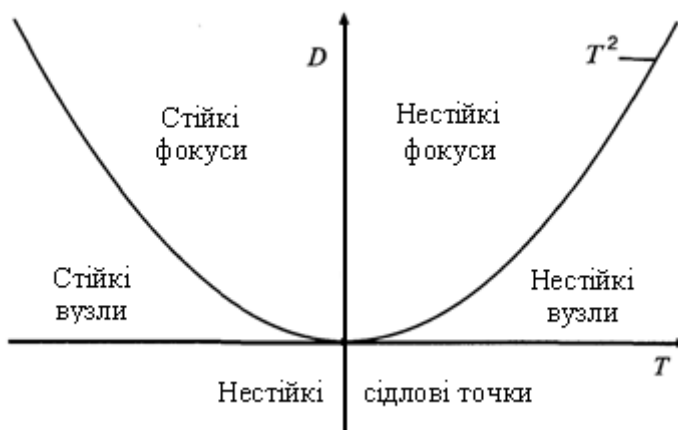
Якщо обидва корені мають від'ємні дійсні частини, особлива точка називається стійким фокусом. Фазові траєкторії наближаються до особливої точки, обертаючись навколо неї (рис. 1.3, г). Якщо p_1 і p_2 мають додатні дійсні частини, то особлива точка є нестійким фокусом (рис. 1.3, д).

В окремому випадку, коли дійсні частини дорівнюють нулю, особлива точка називається центром. Траєкторії в околі особливої точки в цьому разі являють собою замкнені криві, які охоплюють особливу точку (рис. 1.3, е). Характер стійкості для цієї точки визначається більш високими, ніж лінійні членами розкладу f по x .

Якщо один з коренів дорівнює нулю, в системі можуть існувати більш складні особливі точки, наприклад сідло–вузол (див. подальший аналіз, підрозділ 1.7).

Таким чином, стаціонарними точками системи диференціальних рівнянь першого порядку з двома змінними є стійкий вузол, нестійкий вузол, сідло, стійкий фокус, нестійкий фокус, центр.

Тип особливих точок системи з двома динамічними змінними залежно від значення параметрів D і T зображений на рис. 1.4.



1.6. Автоколивання

Серед розв'язків динамічних рівнянь (1.4) особливе місце займають розв'язки, які описують періодичну зміну динамічного стану системи. На фазовій площині такому руху відповідає замкнена траєкторія. Ізольована замкнена траєкторія на фазовій площині називається граничним циклом. Якщо всі сусідні траєкторії при $t \rightarrow \infty$ наближаються до граничного циклу, то граничний цикл називається орбітально стійким (рис. 1.5, а). У разі віддалення траєкторії від граничного циклу, такий цикл називається орбітально нестійким (рис. 1.5, б). Якщо траєкторія при $t \rightarrow \infty$ з одного боку наближається до граничного циклу, а з іншого віддаляється, то граничний цикл називається напівстійким.

Наявність у системі граничного циклу свідчить про існування періодичних коливань, частота і амплітуда яких не залежать від початкових умов. Андронов назвав їх автоколиваннями. Автоколивання виникають за наявності позитивного зворотного зв'язку в системі, а їхня частота визначається внутрішніми параметрами системи. Рівняння, що описують

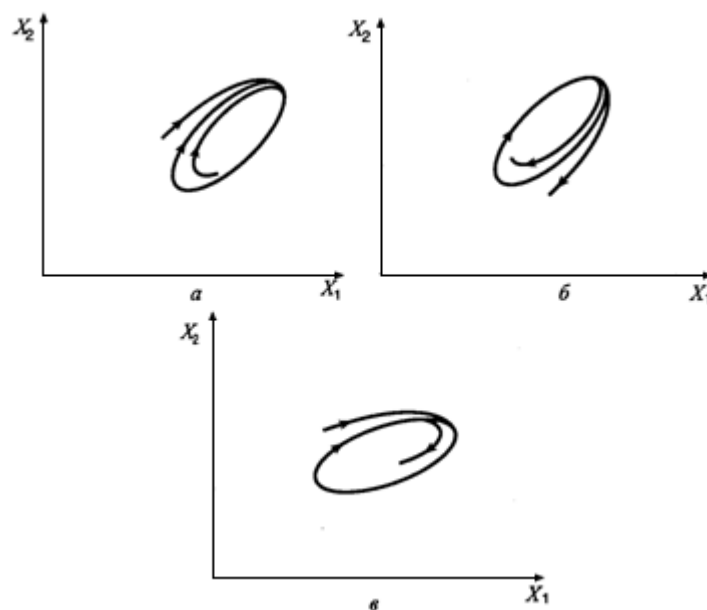


Рис. 1.5. Фазові траєкторії в околі граничних циклів: а — стабільного, б — нестабільного, в — напівстабільного

автоколивання, є нелінійними. Автоколивання виникають у різноманітних явищах: генерування електромагнітних коливань, звучання смичкових інструментів, коливання компонент складу в хімічних реакціях, біологічні осцилятори тощо. Про можливість автоколивального режиму в системі свідчить наявність у розв'язках відповідної системи рівнянь граничного циклу. Тому з'ясуванню наявності граничного циклу, його стійкості присвячена значна кількість досліджень. На жаль, загальних ефективних методів визначення граничних циклів не існує. Розглянемо деякі методи вивчення стійкості і визначення існування граничних циклів.

Стійкість розв'язку для граничного циклу за Ляпуновим визначається співвідношеннями (1.7), (1.8). Проаналізуємо стійкість докладніше для системи двох рівнянь першого порядку (1.36). Нехай $\tilde{X}_1(t)$ і $\tilde{X}_2(t)$ є періодичними розв'язками системи цих рівнянь, що мають період T , тобто

$$\frac{d\tilde{X}_1}{dt} = f_1(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2), \quad \frac{d\tilde{X}_2}{dt} = f_2(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2), \quad (1.45)$$

$$\tilde{X}_1(t) = \tilde{X}_1(t+T), \quad \tilde{X}_2(t) = \tilde{X}_2(t+T). \quad (1.46)$$

Для дослідження стійкості періодичних розв'язків $\tilde{X}_1(t)$ і $\tilde{X}_2(t)$ введемо збурення (флуктуацію)

$$x_1 = \tilde{X}_1(t) - X_1(t), \quad x_2 = \tilde{X}_2(t) - X_2(t) \quad (1.47)$$

і розглянемо залежність флуктуації від часу.

Підставимо (1.47) в рівняння (1.36), враховуючи при цьому, що змінні $\tilde{X}_i(t)$ задовольняють рівнянням (1.45). Вважаючи флуктуації x_1 і x_2 малими, розкладемо функції $f_i(\tilde{X}_1(t) + x_1, \tilde{X}_2(t) + x_2)$ в ряд за степенями x_1 і x_2 . Звідси отримаємо:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial f_i(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)}{\partial \tilde{X}_1} x_1 + \frac{\partial f_i(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)}{\partial \tilde{X}_2} x_2, \quad (1.48)$$

$$i = 1, 2.$$

Наростання або спадання флуктуацій, яке маємо з розв'язку рівняння (1.48), дає нам відповідь про стійкість або нестійкість періодичних розв'язків. Оскільки

функції $\frac{\partial f_i(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)}{\partial \tilde{X}_j}$, що входять в рівняння (1.48), є періодичними функціями, x_1

і x_2 задовольняють лінійній системі рівнянь з періодичними коефіцієнтами.

Загальний розв'язок такої системи може бути заданий у вигляді

$$\begin{aligned} x_1 &= C_1 \exp(p_1 t) \phi_{11}(t) + C_2 \exp(p_2 t) \phi_{12}(t), \\ x_2 &= C_1 \exp(p_1 t) \phi_{21}(t) + C_2 \exp(p_2 t) \phi_{22}(t), \end{aligned} \quad (1.49)$$

де $\phi_{ij}(t)$ – періодична функція аргументу з періодом T ; C_1 і C_2 – сталі. Питання про стійкість розв'язку зводиться до визначення знаків дійсних частин p_1 і p_2 .

Покажемо, що частинним розв'язком системи (1.48) для автономної системи є функція

$$x_1 = \dot{\tilde{X}}_1, \quad x_2 = \dot{\tilde{X}}_2. \quad (1.50)$$

Дійсно, безпосередня підстановка (1.50) в (1.48) дає

$$\frac{d\dot{\tilde{X}}_1}{dt} = \frac{\partial f_1(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)}{\partial \tilde{X}_1} \dot{\tilde{X}}_1 + \frac{\partial f_1(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)}{\partial \tilde{X}_2} \dot{\tilde{X}}_2 = \frac{\partial f_1(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)}{\partial t}. \quad (1.51)$$

Аналогічно

$$\frac{d\dot{\tilde{X}}_2}{dt} = \frac{\partial f_2(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)}{\partial t}. \quad (1.52)$$

Звідси випливає, що

$$\frac{d}{dt} \left(\dot{\tilde{X}}_1 - f_1(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2) \right) = 0, \quad \frac{d}{dt} \left(\dot{\tilde{X}}_2 - f_2(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2) \right) = 0, \quad (1.53)$$

що справді має місце згідно з рівнянням (1.45). Це підтверджує, що (1.50) є частинним розв'язком системи (1.48).

Як частинний розв'язок системи (1.48) розв'язок (1.50) повинен бути представлений у вигляді (1.49). Оскільки похідною від періодичної функції є також періодична функція, то частинному розв'язку (1.49) відповідають, наприклад, розв'язки зі значеннями $p_1 = 0$, $C_2 = 0$, $\phi_{11} = \dot{\tilde{X}}_1$, $\phi_{21} = \dot{\tilde{X}}_2$ у формулі (1.49). Таким чином, один з показників p в (1.49) дорівнює нулю. Згідно

з теорією диференціальних рівнянь з періодичними коефіцієнтами сума показників $p_1 + p_2$ дорівнює середньому значенню по періоду суми діагональних коефіцієнтів системи рівнянь (1.48):

$$p_1 + p_2 = p_2 = \frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{\partial f_1}{\partial \tilde{X}_1} + \frac{\partial f_2}{\partial \tilde{X}_2} \right) dt. \quad (1.54)$$

Таким чином, при відомому розв'язку системи двох рівнянь у вигляді граничного циклу дослідження на стійкість зводиться до обчислення інтеграла (1.54). Якщо $p_2 < 0$, то рух в автономній системі є стійким за Ляпуновим. Проте стійкість не є асимптотичною – при відхиленні система повертається на вихідну траєкторію, але фаза коливань не відновлюється. Якщо $p_2 > 0$, рух є нестійким. При $p_2 = 0$ питання про стійкість потребує додаткового дослідження.

Наведемо деякі теореми, які можуть бути корисними при дослідженні граничного циклу в системі.

а). Для рівняння першого порядку з однією змінною і функцією $f(X)$, аналітичною в усій площині, періодичних розв'язків не існує.

б). У системах з двома змінними на фазовій площині всередині граничного циклу повинна бути принаймні одна особлива точка, що реалізується фізично. Якщо ця точка одна, то вона не може бути сідлом, тобто повинна виконуватись умова

$$D = \frac{\partial f_1}{\partial X_1} \frac{\partial f_2}{\partial X_2} - \frac{\partial f_1}{\partial X_2} \frac{\partial f_2}{\partial X_1} > 0. \quad (1.55)$$

Якщо всередині траєкторії знаходяться декілька особливих точок, то загальне число фокусів, вузлів та центрів повинно перевищувати на одиницю число сідлових точок.

в). Якщо в деякій однозв'язній області величина

$$\frac{\partial f_1}{\partial X_1} + \frac{\partial f_2}{\partial X_2} \quad (1.56)$$

не змінює знака, то в цій області не існують граничні цикли (критерій Бендіксона). Дійсно, припустимо, що граничний цикл існує, і проінтегруємо (1.56) по

деякій області фазової площини, яка охоплена замкненою траєкторією, і використаємо теорему Гріна

$$\int \left(\frac{\partial f_1}{\partial X_1} + \frac{\partial f_2}{\partial X_2} \right) dX_1 dX_2 = \oint (f_1 dX_2 - f_2 dX_1). \quad (1.57)$$

Оскільки інтегрування виконується вздовж траєкторії, яка за припущенням відповідає граничному циклу, то мають місце співвідношення (1.36). Тоді

$$f_1 dX_2 - f_2 dX_1 = \left[f_1 \frac{dX_2}{dt} - f_2 \frac{dX_1}{dt} \right] dt = (f_1 f_2 - f_2 f_1) dt = 0.$$

Якщо інтеграл по деякій області дорівнює нулю, то підінтегральна функція в цій області повинна змінювати знак. Якщо функція не змінює знак, то припущення про наявність граничного циклу є неправильним.

г). Якщо траєкторія завжди залишається всередині скінченної області фазової площини для всіх значень t і не наближається до будь-якої особливої точки, то ця траєкторія є граничним циклом або прямує до нього при $t \rightarrow \infty$ (теорема Пуанкаре – Бендіксона).

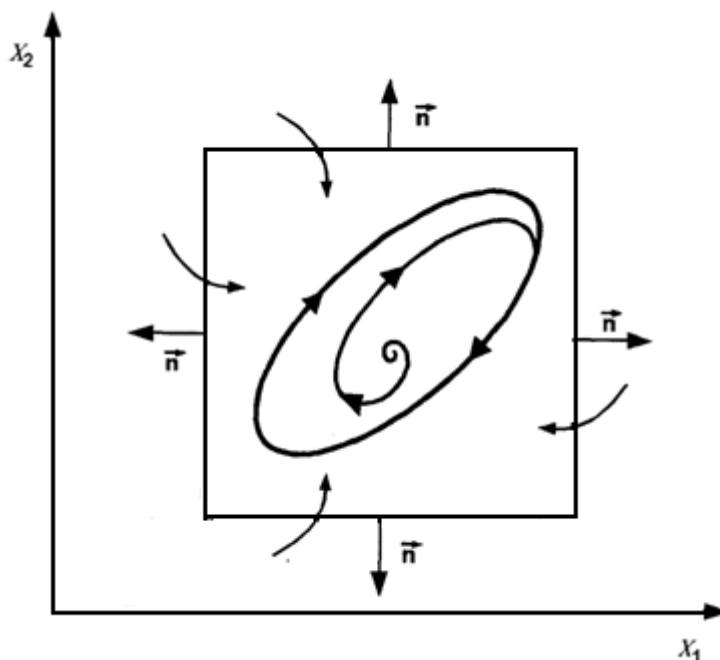


Рис. 1.6. Фазові траєкторії в околі граничного циклу

Якщо L — замкнена лінія з нормаллю \mathbf{n} на фазовій площині, то умова, що траєкторія завжди буде залишатись всередині L , має вигляд

$$n_1 \dot{X}_1 + n_2 \dot{X}_2 < 0 \quad (1.58)$$

для області всередині L .

Зокрема, якщо всередині L існує одна нестійка особлива точка і виконується умова (1.58), то всередині L , обов'язково повинен бути розв'язок у вигляді граничного циклу. Вихід усіх траєкторій на граничний цикл у випадку виконання теореми Пуанкаре—Бендіксона наводиться на рис 1.6 на фазовій площині (X_1, X_2) .

Для систем диференціальних рівнянь з числом змінних, що становить більше двох, теорія періодичних розв'язків розроблена недостатньо. Важливі результати для системи довільної розмірності дає біфуркаційна теорема про граничний цикл (теорема Вінера—Хопфа).

д). У вихідній системі рівнянь (1.4) покладемо $x_i = X_i - X_i^{(s)}(\lambda)$, де $X_i^{(s)}(\lambda)$ — ізольована особлива точка. Тоді

$$\dot{x}_i = F_i(\mathbf{x}, \lambda), \quad (1.59)$$

де $F_i(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{X}^{(s)} + \mathbf{x}, \lambda)$. Особлива точка системи в нових змінних має координату $\mathbf{x} = 0$.

Якщо виконуються умови: 1) $F_i(0, \lambda) = 0$ при всіх λ для деякого відкритого інтервалу; 2) $F_i(\mathbf{x}, \lambda)$ — аналітична функція \mathbf{x} і λ у деякій області; 3) матриця

$A_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial X_j}$ має пару комплексних власних значень p і p^* таких, що

$$p(\lambda) = \alpha(\lambda) + i\omega(\lambda), \quad (1.60)$$

λ_c визначається з умови $\alpha(\lambda_c) = 0$ і мають місце співвідношення $\omega(\lambda_c) = \omega_0 > 0$, $\alpha'(\lambda_c) \neq 0$; 4) інші $N-2$ власні значення матриці A_{ij} мають від'ємні дійсні частини, то тоді існує деяке число $\varepsilon_1 > 0$ і аналітична функція

$$\lambda(\varepsilon) = \lambda_c + \sum \lambda_{n1} \varepsilon^n \quad (1.61)$$

така, що для $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ система (1.59) має при $\lambda = \lambda(\varepsilon)$ періодичний розв'язок.

Період $T(\varepsilon)$ є аналітичною функцією і визначається формулою

$$T(\varepsilon) = \frac{2\pi}{\varpi_0} \left(1 + \sum_n T_n \varepsilon^n\right), \quad (1.62)$$

$$0 < \varepsilon < \varepsilon_1.$$

Теорема про біфуркацію граничного циклу є потужним методом вивчення періодичних розв'язків, зокрема дає можливість обчислити їх періоди. Проте вона не дає ніякої інформації про їхню стійкість.

е). Нехай в системі (1.4) праві частини такі, що $\frac{\partial f_i}{\partial X_j} = \frac{\partial f_j}{\partial X_i}$ для довільних i та j . Тоді можна ввести потенціал V :

$$f_i = -\frac{\partial V}{\partial X_j}, \quad (1.63)$$

а вихідну систему переписати у вигляді

$$\frac{\partial X_i}{\partial t} = -\frac{\partial V}{\partial X_j}. \quad (1.64)$$

Така система називається градієнтною. Градієнтна система не має розв'язків у вигляді граничного циклу. Для доведення цього твердження припустимо, що періодичний розв'язок існує. Домножимо (1.64) на $\frac{\partial X_i}{\partial t}$, підсумуємо по i та проінтегруємо по періоду. Отже, маємо:

$$\begin{aligned} \int_0^{t+T} \sum_i \left(\frac{dX_i}{dt} \right)^2 dt &= - \int_0^{t+T} \sum_i \left(\frac{dX_i}{dt} \frac{\partial V_i}{\partial X_i} \right) dt = \\ &= - \int_0^{t+T} \frac{dV(\mathbf{X}(t))}{dt} dt = -V(\mathbf{X}(t+T)) + V(\mathbf{X}(t)). \end{aligned} \quad (1.65)$$

Права частина дорівнює нулю внаслідок припущення про періодичність руху. З іншого боку, оскільки $\left(\frac{dX_i}{dt} \right)^2 > 0$, то ліва частина не дорівнює нулю. Тому припущення про періодичність руху не виконується і граничних циклів у розглянутій градієнтній системі не існує.

1.7. Структурна стійкість. Біфуркація.

Зміна параметрів λ , які входять у систему рівнянь (1.4), зумовлює зміну характеру розв'язків. З'являються нові (або зникають) особливі точки, стійкі особливі точки стають нестійкими, і навпаки, тощо. При цьому у фазовому просторі змінюється вигляд і розташування траєкторій. Структурна стійкість означає стійкість розбиття фазового простору на траєкторії щодо малої зміни параметрів диференційного рівняння. Коли при малій зміні λ якісна картина траєкторії не змінюється, то розв'язок є структурно стійким. Якщо структура фазових траєкторій змінюється, то розв'язок нестійкий. Значення параметра $\lambda = \lambda_c$, при якому різко змінюється якісна картина траєкторії, називається критичним або біфуркаційним. За визначенням при як завгодно близьких до λ_c значеннях параметра $\lambda < \lambda_c$ і $\lambda > \lambda_c$ топологічна структура фазової площини різна. При зміні параметра λ стійкий фокус може перетворитися в нестійкий тощо.

Розглянемо приклад з однією змінною, динаміка якої описується рівнянням

$$\dot{X} = \lambda X - \beta X^3, \quad (1.66)$$

де $\beta > 0$.

Особливі точки системи визначаємо з умови $f(X^{(s)}) = \lambda X^{(s)} - \beta X^{(s)3} = 0$.

Ці точки є стійкими при $p = \left(\frac{df}{dX} \right)_{X^{(s)}} = \lambda - 3\beta X^{(s)2} < 0$. Для рівняння (1.66) при

$\lambda < 0$ існує одна стійка особлива точка $X^{(1)} = 0$ ($p = \lambda$). При $\lambda > 0$ існують три особливі точки $X^{(1)} = 0$, $X^{(2)} = \left(\lambda / \beta \right)^{\frac{1}{2}}$, $X^{(3)} = -\left(\lambda / \beta \right)^{\frac{1}{2}}$, причому $X^{(1)}$ – нестійка точка, а точки $X^{(2)}$ і $X^{(3)}$ – стійкі ($p = -2\lambda$). Таким чином, при зростанні λ система спочатку (при $\lambda < 0$) має одну стійку особливу точку, а при $\lambda > 0$ ця точка стає нестійкою і в системі з'являються дві стійкі стаціонарні точки. Значення параметра $\lambda = \lambda_c = 0$ є біфуркаційним.

Для системи рівнянь з двома динамічними змінними характер особливої точки при малій зміні λ змінюється, якщо у співвідношенні (1.41) або D , або T обертається в нуль. Тоді умови для біфуркаційного значення параметра мають вигляд

$$D(X_1^{(s)}, X_2^{(s)}, \lambda_c) = 0, \quad (1.67, a)$$

$$T(X_1^{(s)}, X_2^{(s)}, \lambda_c) = 0. \quad (1.67, b)$$

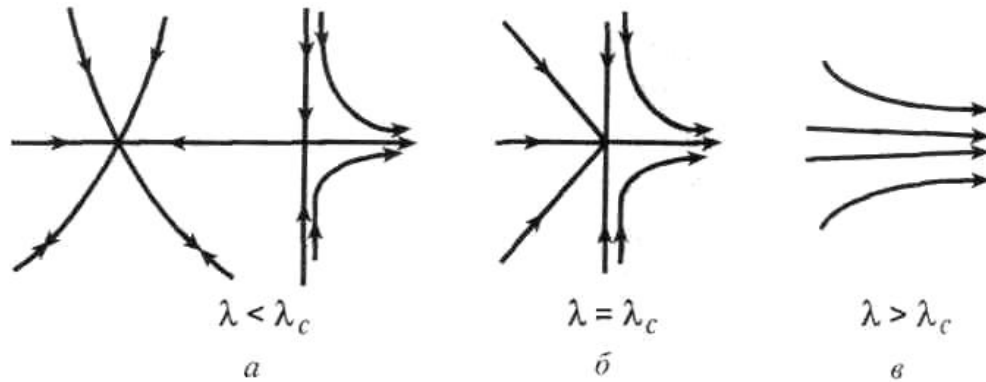


Рис. 1.7. Злиття стабільного вузла й сідлової точки

Умова (1.67, а) може виконуватись при злитті двох особливих точок – вузла і сідла. На рис. 1.7, а-в показано, як зі зміною параметра зникають особливі точки.

Умова (1.67, б) відповідає особливій точці типу «центр». У цьому разі зі зміною параметра стійкий фокус може перетворитися в нестійкий, і навпаки.

Якщо існує кілька параметрів, можна побудувати простір з осями, що відповідають різним параметрам. Цей простір можна поділити на області. Для параметрів цих областей фазові траєкторії ведуть себе однаково. У просторі параметрів D і T такий поділ зображено на рис. 1.4. Області з однаковою поведінкою траєкторій на рисунку розділяються біфуркаційними лініями. У загальному випадку багатьох параметрів області з однаковою поведінкою траєкторій розділяються гіпер поверхнями.

Проаналізуємо поведінку флуктуацій залежно від часу у випадку, коли система знаходиться в околі особливої точки. При малих відхиленнях стану від особливої точки поведінка динамічних змінних згідно із співвідношеннями (1.30) і (1.31) описується рівнянням:

$$x_i(t) = \sum_v q_{v0} \exp(p_v t) u_{iv}, \quad (1.68)$$

де значення q_{v0} визначаються величиною відхилення динамічних змінних від

$$\text{їхнього значення в особливій точці при } t=0 \quad \left(q_{v0} = \sum_i v_{iv}^* x_i(0) \right).$$

У точці біфуркації змінюється характер стійкості особливої точки, тому для однієї з мод, наприклад для $v = \alpha$, реальна частина p_α змінює знак, а отже в околі точки біфуркації $\operatorname{Re} p_\alpha \rightarrow 0$. Це значить, що один з доданків у формулі (1.68) (при $v = \alpha$) повільно змінюється з часом (проте може коливатись, якщо $\operatorname{Im} p_\alpha \neq 0$). Таким чином, ми дістаємося висновку про уповільнення руху в околі особливої точки при зовнішньому параметрі, близькому до біфуркаційного значення. Наприклад, якщо особлива точка стійка, то при зовнішніх параметрах, близьких до біфуркаційних, після відхилення система дуже повільно релаксує до стаціонарного стану (осцилюючи, якщо $\operatorname{Im} p_\alpha \neq 0$). Час релаксації прямує до нескінченності, якщо значення зовнішнього параметра наближається до біфуркаційного. Аналогічно система повільно покидає (знову ж таки осцилюючи, якщо $\operatorname{Im} p_\alpha \neq 0$) нестійку особливу точку за умов, близьких до біфуркаційних.

1.8. Аналітичні розв'язки в околі точки біфуркації

Загальних методів розв'язку системи нелінійних рівнянь не існує. Для аналізу розв'язків використовується якісний аналіз траєкторій у фазовому просторі, широко використовуються числові методи. При значеннях зовнішніх параметрів λ , близьких до біфуркаційних, можна отримати аналітичні розв'язки. Викладемо стисло ідею методу.

Дослідимо розв'язки автономної системи рівнянь (1.4) при зовнішніх параметрах, близьких до біфуркаційних. Введемо відхилення від особливої точки $x_i = X_i - X_i^{(s)}$, і, вважаючи відхилення малою величиною, розкладемо функцію $f_i(\mathbf{X}_i^{(s)} + \mathbf{x}, \lambda)$ в ряд по степенях x_i . Оскільки розклад проводиться поблизу стаціонарної точки, член нульового порядку по x_i відсутній:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(\mathbf{X}_i^{(s)} + \mathbf{x}, \lambda) = A_{ij}(\lambda)x_j + B_{ijk}(\lambda)x_j x_k + C_{ijkl}(\lambda)x_j x_k x_l + \dots \quad (1.69)$$

За індексами, що повторюються, тут проводиться підсумовування від 1 до N . У лінійному наближенні рівняння (1.69) задовольняє розв'язкам рівнянь (1.16), (1.20). Враховуючи залежність величин від λ , останнє рівняння можна переписати так:

$$A_{ij}(\lambda)u_{iv} = p_v(\lambda)u_{iv}. \quad (1.70)$$

Для стійких розв'язків усі власні значення від'ємні. У точці біфуркації стаціонарних розв'язків одне з власних значень стає додатним. Пронумеруємо розв'язки лінійізованого рівняння так, щоб для цього власного значення $v=1$.

Тоді в точці біфуркації $p_1(\lambda_c)=0, \left(\frac{dp_1}{d\lambda}\right)_{\lambda_c} \neq 0, p_v < 0$ при $v \neq 0$. Власні вектори

\mathbf{u}_v і \mathbf{v}_v^* для розв'язку в точці біфуркації задовольняють рівнянням

$$A_{ij}(\lambda_c)u_{i1} = 0, A_{ji}(\lambda_c)v_{j1}^* = 0. \quad (1.71)$$

Стан $\mathbf{x}=0$, стійкий при $\lambda < \lambda_c$, стає нестійкий при $\lambda > \lambda_c$.

Розглянемо розв'язок вихідного нелінійного рівняння в околі точки біфуркації. Шукаємо розв'язок у вигляді степеневого ряду деякого малого параметра ε

$$x_i = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n x_{in} \quad (1.72)$$

$$\lambda = \lambda_c + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \lambda_n. \quad (1.73)$$

Тоді рівняння (1.69) для стаціонарного випадку ($\frac{d\mathbf{x}}{dt} = 0$) приймає вигляд:

$$\begin{aligned} & A_{ij} \left(\lambda_c + \sum_m \varepsilon^m \lambda_m \right) \sum_n \varepsilon^n x_{jn} + \sum_{j,k} B_{ijk} \left(\lambda_c + \sum_m \varepsilon^m \lambda_m \right) \sum_n \varepsilon^n x_{jn} \sum_f \varepsilon^f \lambda_{kf} + \\ & + \sum_{j,k,l} C_{ijkl} \left(\lambda_c + \sum_m \varepsilon^m \lambda_m \right) \sum_n \varepsilon^n x_{jn} \sum_f \varepsilon^f x_{kf} \sum_p \varepsilon^p x_{ip} + \dots = 0 \end{aligned} \quad (1.74)$$

Розкладаючи функції $A_{ij}(\lambda), B_{ijk}(\lambda), C_{ijkl}(\lambda)$ в ряд по степенях ε та порівнюючи коефіцієнти при однакових степенях ε , маємо:

$$A_{ij}(\lambda_c)x_{j1} = 0. \quad (1.75)$$

$$A_{ij}(\lambda_c)x_{j2} + \left(\frac{\partial A_{ij}}{\partial \lambda} \right)_{\lambda_c} \lambda_1 x_{j1} + B_{ijk}(\lambda_c)x_{j1}x_{k1} = 0. \quad (1.76)$$

$$A_{ij}(\lambda_c)x_{j3} + \left(\frac{\partial A_{ij}}{\partial \lambda}\right)_{\lambda_c} \lambda_1 x_{j2} + \left(\frac{\partial A_{ij}}{\partial \lambda}\right)_{\lambda_c} \lambda_2 x_{j1} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial A_{ij}}{\partial \lambda}\right)_{\lambda_c} \lambda_1^2 x_{j1}^2 +$$

$$+ B_{ijk}(\lambda_c)(x_{j2}x_{k1} + x_{j1}x_{k2}) + \left(\frac{\partial B_{ijk}}{\partial \lambda}\right)_{\lambda_c} \lambda_1 x_{j1}x_{k1} + C_{ijkl}(\lambda_c)x_{j1}x_{k1}x_{l1} = 0 \quad (1.77)$$

З порівняння співвідношень (1.75) і (1.71) випливає, що

$$x_{j1} = u_{j1}. \quad (1.78)$$

Для визначення λ_n і x_{jn} ($n > 1$) використаємо теорему існування розв'язків лінійного рівняння з правою частиною (альтернатива Фредгольма).

Рівняння

$$A_{ij}(\lambda_c)y_i = q_i \quad (1.79)$$

має розв'язок відносно y_j тоді і тільки тоді, коли

$$q_i v_{i1}^* = 0, \quad (1.80)$$

де v_{i1}^* – розв'язок спряженого рівняння (1.71) у точці біфуркації.

Для доведення необхідності умови (1.80) помножимо (1.79) на v_{i1}^* і підсумуємо по i

$$v_{i1}^* A_{ij}(\lambda_c)y_j = q_i v_{i1}^* \quad (1.81)$$

Згідно з (1.71) ліва частина цієї рівності дорівнює нулю і, отже, ми дістаємо умову (1.80).

Рівняння (1.76), (1.77) і наступні вищого порядку розкладу можна представити у вигляді, подібному до співвідношення (1.79):

$$A_{ij}(\lambda_c)x_{jn} = q_i(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}), \quad (1.82)$$

де $\mathbf{x}_m = (\dots, x_{im}, \dots)$, x_{im} – коефіцієнти в розкладі (1.72). Згідно з (1.82) коефіцієнти розкладу n -го порядку визначаються через коефіцієнти $(n-1)$ -го порядку. Права частина рівняння (1.82) відповідно до умови (1.80) повинна бути ортогональною до v_{i1}^* . Звівши рівняння (1.76), (1.77) до вигляду (1.82), визначимо q_i . Використовуючи умову (1.80), отримаємо значення λ_1, λ_2 і т. д. При обраних

таким чином λ_n рівняння (1.76), (1.77) і наступні мають розв'язки для x_{jn} . Розв'язок вихідної системи через x_{jn} описується формулами (1.72), (1.73). При відомих λ_n з (1.73) можна визначити $\varepsilon(\lambda)$. Тоді формула (1.72) дає значення динамічної змінної \mathbf{x} залежно від зовнішнього параметра.

Аналогічний розгляд можна провести для біфуркації граничного циклу. В цьому разі при зміні параметра λ у власному значенні $p_v(\lambda) = \alpha_v(\lambda) + i\omega_v(\lambda)$ дійсна частина $\alpha_v(\lambda)$ проходить через нуль, змінюючись від від'ємних значень при $\lambda < \lambda_c$ до додатних $\lambda > \lambda_c$. У точці біфуркації $\lambda = \lambda_c$, при цьому $\omega_v(\lambda_c) = \omega_c$. В околі точки біфуркації розв'язок можна отримати таким чином. У вихідному рівнянні, записаному в нормальній формі (1.31), зробимо заміну змінних $t = \tau/\omega_v$:

$$\omega_c \frac{dq_v}{d\tau} = p_v(\lambda)q_v + \Phi_v(q, \lambda). \quad (1.83)$$

Розкладемо ω_c, q_v, λ в ряд по малому параметру аналогічно (1.72), (1.73):

$$\omega_v = \omega_c + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \dots, \quad (1.84)$$

$$\lambda = \lambda_c + \varepsilon\lambda_1 + \varepsilon^2\lambda_2 + \dots, \quad (1.85)$$

$$q = \varepsilon q_{v1} + \varepsilon^2 q_{v2} + \dots \quad (1.86)$$

Після підстановки цих співвідношень у (1.83), прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях ε та використання альтернативи Фредгольма матимемо значення $\omega_1, \omega_2, \lambda_1, \lambda_2, q_{v1}, q_{v2}$ і т. д. Ці дані дають можливість пов'язати значення динамічної змінної та частоту коливань (q_v, ω_v) з відхиленням параметра λ від біфуркаційного значення λ_c .

Приклади застосування методу будуть наведені при розгляді конкретних задач.

1.9. Швидкі та повільні рухи. Адіабатичне наближення

Для розв'язку нелінійних рівнянь широко застосовуються наближені методи. Такі методи є найбільш ефективними, якщо система має малий параметр. У роботах Крилова, Боголюбова [16] та інших досліджувались системи, що містять малий параметр як множник перед нелінійними членами. У роботах

Портнягіна, Тихонова [17], [18] запропоновано методи розв'язку диференціальних рівнянь з малим параметром перед похідною за часом в деяких рівняннях з розглядуваної системи рівнянь. Наявність такого параметра відповідає різним характерним часовим характеристикам руху різних динамічних змінних і дає змогу зменшити кількість диференціальних рівнянь, які потрібно розв'язати. Розглянемо вплив малого параметра на прикладі двох рівнянь першого порядку з двома динамічними змінними:

$$\frac{dX_1}{dt} = f_1(X_1, X_2), \quad \varepsilon \frac{dX_2}{dt} = f_2(X_1, X_2) \quad (1.87)$$

де $0 < \varepsilon \ll 1$.

Малість величини ε наводить на думку, що рух буде відбуватися в околі області, де $f_2(X_1, X_2) = 0$. Проаналізуємо справедливність цього припущення докладніше. Нехай точки \tilde{X}_1 і \tilde{X}_2 – точки, що знаходяться на кривій $f_2(X_1, X_2) = 0$. Для інших точок введемо позначення

$$x_1 = X_1 - \tilde{X}_1, \quad x_2 = X_2 - \tilde{X}_2. \quad (1.88)$$

Тоді з (1.87) для малих значень x_1 і x_2 маємо:

$$\frac{dX_2}{dt} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial f_2(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)}{\partial \tilde{X}_1} \right) x_1 + \left(\frac{\partial f_2(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)}{\partial \tilde{X}_2} \right) x_2 \quad (1.89)$$

Звідси випливає, що коли траєкторія проходить в області в околі точки $f_2(X_1, X_2) = 0$ настільки малої, що $x_1, x_2 \ll \varepsilon$, то $\frac{dX_2}{dt}$ є обмеженою величиною при $\varepsilon \rightarrow 0$ і тоді система (1.87) набуває вигляду:

$$\begin{aligned} \frac{dX_1}{dt} &= f_1(X_1, X_2), \\ f_2(X_1, X_2) &= 0. \end{aligned} \quad (1.90).$$

З другого рівняння можна визначити X_2 через X_1 , підставити його значення в перше рівняння і, таким чином, отримати одне рівняння для X_1 . Тобто, маємо справу зі зменшенням кількості диференціальних рівнянь. Рухи, що описуються рівняннями (1.90), називаються повільними.

Якщо $x_1, x_2 \geq \varepsilon$, то з (1.89) при $\varepsilon \rightarrow 0$ $\frac{dX_2}{dt} \rightarrow \infty$. Для фазової траєкторії маємо:

$$\frac{dX_1}{dX_2} = \varepsilon \frac{f_1(X_1, X_2)}{f_2(X_1, X_2)} \rightarrow 0 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0 \quad (1.91)$$

У цій області фазова траєкторія має вигляд прямої, яка паралельна осі $OX_2 (X_1 = const)$. Оскільки $\frac{dX_2}{dt} \rightarrow \infty$ швидкість руху вздовж цієї прямої є великою. Ця область називається областю швидких рухів. Рівняння для швидких рухів має вигляд:

$$\begin{aligned} X_1 &= X_1^0 = const, \\ \varepsilon \frac{dX_2}{dt} &= f_2(X_1^0, X_2). \end{aligned} \quad (1.92)$$

Особлива точка цього рівняння визначається умовою $f_2(X_1^0, X_2) = 0$.

З (1.92) випливає, що ця особлива точка буде стійкою за умови

$$\frac{\partial f_2(X_1^0, X_2)}{\partial X_2} < 0. \quad (1.93)$$

Якщо виконується умова (1.93), то точка на фазовій площині, яка знаходилась в області швидких рухів, перейде в особливу точку $f_2(X_1^0, X_2) = 0$, тобто в область повільних рухів (1.90). Якщо точка знаходилась в області повільних рухів, то вона залишиться в цій області. Таким чином, умовою для скорочення числа диференціальних рівнянь (або умовою перебування системи в області повільних рухів) є співвідношення (1.93).

Якщо $\frac{\partial f_2}{\partial X_2} > 0$, точки лінії $f_2(X_1^0, X_2) = 0$ є нестійкими для швидких рухів.

У такому разі точка, яка знаходиться в області повільних рухів, покине цю область, і тому важливим є врахування малого параметра при розгляді рівняння руху.

Для використання методу скорочення числа рівнянь за наявності малого параметра наведемо теорему Тихонова [17].

Нехай система вихідних N рівнянь (1.4) поділяється на дві групи: перша група – m рівнянь, що не містять малого параметра, друга – система рівнянь, яка має малий параметр ε перед похідною за часом. Отже

$$\frac{\partial f_i}{\partial X_2} = f_i(\mathbf{X}, \lambda), \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad (1.94)$$

$$\varepsilon \frac{\partial X_j}{\partial t} = f_j(\mathbf{X}, \lambda), \quad j = m+1, m+2, \dots, N. \quad (1.95)$$

Згідно з теоремою Тихонова розв'язок системи рівнянь (1.94), (1.95) при $\varepsilon \rightarrow 0$ переходить у розв'язок системи (1.94), де X_j при $j = m+1, m+2, \dots, N$ з рівняння визначаються через X_i при $i = 1, 2, \dots, m$ з рівняння

$$f_i(\mathbf{X}, \lambda) = 0 \quad (1.96)$$

за виконання умов:

а) величини $X_j (j = m+1, m+2, \dots, N)$, що визначаються з рівняння (1.96), є ізольованими особливими точками;

б) розв'язок X_j є стійкою особливою точкою системи (1.94) при довільних $X_i (i = 1, 2, \dots, m)$, а початкові умови такі, за яких система знаходиться в області притягування цієї точки. Таким чином, за наявності малого параметра перед похідною число диференціальних рівнянь може скоротитися. Поява малого параметра може бути пов'язана з різноманітними причинами. Наприклад, характерні часи руху легких частинок (електронів) і важких (ядер) істотно відрізняються. Процес поширення тепла при теплопровідності може бути значно швидший або залежно від системи, навпаки, більш повільний, ніж дифузія частинок, і т.д. Координати швидшої системи стежать за координатами повільнішої системи (співвідношення (1.96)). Для кожного положення повільної системи встигає встановитися стан швидкої системи. Таке наближення називається адіабатичним. Хакен у монографіях із синергетики називає його принципом підпорядкування [2] і позначає ефективність його застосування при параметрах системи, близьких до біфуркаційних значень, коли малим параметром є одне із значень p_v характеристичного рівняння (1.18). Дослідимо це питання докладніше.

Розглянемо систему рівнянь у нормальній формі (1.31). Нехай при певних значеннях λ усі дійсні частини $p_\nu(\lambda)$ від'ємні і стаціонарний рух є стійким. Припустимо, що зі зміною λ одне з власних значень, що було від'ємним, стає додатним, тобто має місце сідлова біфуркація. Для визначеності будемо вважати, що нестійкою є мода з $\nu=1$, тобто $p_1(\lambda_c)=0$, а при $\lambda \approx \lambda_c$ $p_1(\lambda)$ є малою величиною. Введемо позначення $\tau = p_1(\lambda)t$. Тоді система (1.31) набуває вигляду:

$$\frac{dq_1}{d\tau} = q_1 + \frac{1}{p_1(\lambda)} \Phi_1(q, \lambda), \quad (1.97)$$

$$p_1(\lambda) \frac{dq_\mu}{d\tau} = p_\mu q_\mu + \Phi_\mu(q, \lambda), \quad (1.98)$$

$$\mu = 2, 3, \dots, N.$$

Величина $p_1(\lambda)$ відіграє роль малого параметра. Тоді система рівнянь (1.97), (1.98) еквівалентна системі рівнянь (1.94), (1.95). Згідно з теоремою Тихонова можна записати

$$p_\mu q_\mu + \Phi_\mu(q, \lambda) = 0 \quad (1.99)$$

Система співвідношень (1.99) з різними значеннями μ , є системою алгебраїчних рівнянь для визначення всіх нормальних координат через нормальну координату q_1 . Підставивши їхнє значення в рівняння (1.97) і повернувшись від змінної τ до t , отримаємо:

$$\frac{dq_1}{dt} = p_1(\lambda) q_1 + \Phi_1(q_1, q_2(q_1), q_3(q_1), \dots, \lambda). \quad (1.100)$$

Розв'язок задачі з багатьма змінними в околі точки біфуркації приведено до розв'язку одного диференційного рівняння. Співвідношення (1.100) відображає принцип підпорядкування, коли координати швидких мод визначаються через координати повільних мод.

1.10. Просторово-неоднорідні системи

У багатьох випадках значення динамічних змінних залежать від просторових координат. Такі системи називаються просторово-неоднорідними.

Так, від координати можуть залежати густина речовини, густина заряду, швидкість рідини, температура тощо.

Рівняння для визначення динамічних змінних впливає з основних законів розглядуваної області явищ. У просторово-неоднорідних системах вони являють собою систему нелінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних. Так, згідно із законом збереження кількості речовини можемо записати рівняння для густини частинок $\rho_i(\mathbf{r}, t)$ i -го сорту:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} = -\operatorname{div} \mathbf{j}_i + f_i(\rho, t), \quad (1.101)$$

де ліва частина рівняння — зміна густини частинок i -го сорту за одиницю часу; праворуч — перший член описує зміну густини частинок в одиниці об'єму внаслідок їх виходу з (або приходу до) даного об'єму завдяки руху частинок (\mathbf{j} — густина потоку частинок), другий член описує зміну густини частинок внаслідок їх народження (знищення) у процесі деяких реакцій; $f_i(\rho, t)$ — у загальному випадку — нелінійна функція аргументів. При виконанні закону Фіка для ізотропного середовища має місце формула

$$\mathbf{j}_i = -D_i \vec{\nabla} \rho_i, \quad (1.102)$$

де D_i — коефіцієнт дифузії частинок i -го сорту.

З (1.101) і (1.102) при сталих значеннях D впливає

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} = D_i \Delta \rho_i + f_i(\rho, t). \quad (1.103)$$

У подібному вигляді записується рівняння для теплопровідності

$$c \frac{\partial T}{\partial t} = \chi \Delta T + q(T, t), \quad (1.104)$$

де T — температура; χ — коефіцієнт теплопровідності; c — теплоємність; функція $q(T, t)$ описує створення тепла різними джерелами.

Позначимо через $X_i(\mathbf{r}, t)$ i -ту динамічну змінну, наприклад, у процесах теплопровідності це температура. Для широкого кола явищ у неоднорідних системах вихідну систему рівнянь можна представити в такому вигляді:

$$\frac{\partial X_i}{\partial t} = D_i \Delta X_i + f_i(\mathbf{X}, \lambda). \quad (1.105)$$

Вектор \mathbf{X} означає сукупність усіх динамічних змінних. До цієї системи потрібно задати початкові й граничні умови.

Частинним розв'язком системи (1.105) є стаціонарний розв'язок, в якому $X_i(\mathbf{r}, t) = X_i^{(s)}(\mathbf{r}, t)$. Стаціонарний розв'язок задовольняє рівнянню

$$D_i \Delta X_i^{(s)}(\mathbf{r}) + f_i(\mathbf{X}^{(s)}, \lambda) = 0 \quad (1.106)$$

Розв'язок $X_i^{(s)}(r)$ є стійким, якщо збурення розв'язку $X_i^{(s)}(r) \rightarrow X_i(r, t)$ залишається обмеженим з часом. Для асимптотично стійкого розв'язку відхилення прямує до нуля:

$$|X_i(\mathbf{r}, t) - X_i^{(s)}(\mathbf{r})| \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty. \quad (1.107)$$

Для визначення критеріїв стійкості введемо мале відхилення від стаціонарного розв'язку

$$x = X_i(\mathbf{r}, t) - X_i^{(s)}(\mathbf{r}). \quad (1.108)$$

Рівняння для відхилення x_j отримаємо після підстановки (1.108) у (1.105) та розкладу функції f_i в ряд по x_i до лінійних членів

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = D_i \Delta x_i + \sum_j \frac{\partial f_i(\mathbf{X}, \lambda)}{\partial X_j} x_j. \quad (1.109)$$

Для незалежних від часу функцій $f_i(\mathbf{X}, \lambda)$ розв'язок (1.109) визначимо з вигляду

$$x_i = u_i(\mathbf{r}) \exp(pt). \quad (1.110)$$

Згідно з (1.109) $u_i(\mathbf{r})$ задовольняє рівнянню

$$p u_i = D_i \Delta u_i + \sum_j \frac{\partial f_i(\mathbf{X}, \lambda)}{\partial X_j} u_j \quad (1.111)$$

Розв'язок системи рівнянь (1.111) разом з граничними умовами існує при певних значеннях p . Сукупність значень p визначає спектр власних значень, відповідні їм функції u_i називаються власними функціями. Окремі розв'язки, як і у випадку однорідних систем, називають модами. За своїм виглядом рівняння

(1.111) у випадку однієї змінної нагадує рівняння Шредінгера. Тому для аналізу його розв'язків часто використовують значний набір задач, досліджених у квантовій механіці. Оскільки оператор, що діє на функцію u_i , не є ермітовим, власні значення не є обов'язково дійсні. У загальному випадку

$$p = \operatorname{Re} p + i \operatorname{Im} p. \quad (1.112)$$

Згідно з (1.110) окремий розв'язок (мода) є стійким, коли для всіх $p \operatorname{Re} p < 0$. Якщо існує принаймні одна мода, для якої $\operatorname{Re} p > 0$, збурення буде зростати з часом і розв'язок є нестійким. Можлива ситуація, коли серед розв'язків системи (1.106) реалізується однорідний стаціонарний розв'язок $X_i^{(s)} = \text{const}$. При зміні параметра λ ця мода може стати нестійкою і система перейде в інший стан, який може бути неоднорідним. Як ми уже зазначали, неоднорідні системи, що існують у нерівноважних умовах, називаються дисипативними структурами.

Запишемо рівняння (1.105) в іншому вигляді. Введемо оператор

$$\bar{L} \equiv \|L_{ij}\| \quad (1.113)$$

який зображається у вигляді матриці з компонентами

$$L_{ij} = D_i \delta_{ij} \Delta + A_{ij}, \quad (1.114)$$

$$\text{де } A_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial X_j}.$$

Рівняння (1.105) можна переписати у вигляді

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = \bar{L} \mathbf{x} + \mathbf{f}_2(\mathbf{X}, \lambda), \quad (1.115)$$

де

$$f_{2i} = f_i(\mathbf{X}^{(s)} + \mathbf{x}, \lambda) - \sum_j A_{ij} x_j \quad (1.116)$$

— функція, розклад якої в ряд по степенях x_i починається з квадратичних членів.

Розв'язок лінійного рівняння (1.115) (без члена \mathbf{f}_2) має вигляд:

$$x_i = u_{iv}(\mathbf{r}) \exp(p_v t), \quad (1.117)$$

$$L_{ij} u_{jv}(\mathbf{r}) = p_v u_{iv}(\mathbf{r}). \quad (1.118)$$

Розв'язок u_{iv} є ортогональним до розв'язка спряженого рівняння

$$\tilde{L}^+ \mathbf{v}_v^*(\mathbf{r}) = p_v(\mathbf{r}) \mathbf{v}_v^*. \quad (1.119)$$

Умова ортогональності для нормованих розв'язків має вигляд

$$\int \mathbf{v}_v^*(\mathbf{r}) \mathbf{u}_{v'}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \delta_{vv'}. \quad (1.120)$$

Розкладемо розв'язок вихідного рівняння (1.115) по розв'язках для окремих мод

$$x_i = \sum_v q_v(t) u_{iv}(\mathbf{r}), \quad (1.121)$$

де коефіцієнти $q_v(t)$ задовольняють рівнянню

$$\dot{q}_v = p_v(\lambda)_v + \Phi_v(q, \lambda), \quad (1.122)$$

$$\Phi_v(q, \lambda) = \int \mathbf{v}_v^*(\mathbf{r}) \mathbf{f}_2 \left(\sum_{\alpha} q_{\alpha} u_{\alpha}(\mathbf{r}), \lambda \right) d\mathbf{r}. \quad (1.123)$$

Рівняння для просторово-неоднорідної системи в нових змінних (1.122) приведено до вигляду вихідної системи рівнянь в однорідному випадку (1.31), тобто до системи рівнянь, не залежних від координат. Тому можна застосовувати вже викладені методи дослідження часових рівнянь. Проте розв'язок системи, заданої у вигляді (1.122), може виявитися більш складним, ніж розв'язок вихідної системи (1.105). Так, для однієї змінної рівняння (1.105) являє собою одне рівняння в частинних похідних, а (1.122) є нескінченна система рівнянь першого порядку. В околі точки біфуркації, коли одна мода стає нестійкою, $p_v(\lambda) \approx 0$ для цієї моди і можна за допомогою адіабатичного наближення виключити всі змінні q_v , залишивши лише одне або кілька рівнянь, що описують рух нестійкої моди (1.100). У цьому разі дослідження за допомогою системи (1.122) стає ефективним.